

УДК 004.932

## **Многоканальные фильтры Фреше и их применение для гиперспектральных изображений**

Ярмиева Э.Н.<sup>1\*</sup>, Иванов П.А.<sup>1</sup>, Шатилов Д.В.<sup>1</sup>, Остхаймер Е.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Мира, 19, Екатеринбург 620002 РОССИЯ*

<sup>2</sup>*Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA  
elina-yarmieva@mail.ru*

**Аннотация.** Медианная фильтрация широко используется при обработке изображений, в которых пиксель представляется набором его скалярных компонент, значение пикселя заменяется медианой пикселей в окне вокруг него. В данной работе рассматриваются изображения, в которых пиксели представляются вектором в цветовом пространстве. Обработка данных изображений основывается на идее о том, что медиана – это значение пикселя, сумма расстояний до которого от остальных пикселей окна минимальна. Медиана Фреше дискретного набора векторнозначных пикселей в пространстве с метрикой является точкой минимума суммы метрических расстояний до всех пикселей. В этой статье расширяется понятие медианы Фреше до обобщенной медианы Фреше, которая является минимумом стоимостной функцией Фреше, представленной агрегационной функцией метрических расстояний, вместо обычной суммы. Кроме того, мы предлагаем использовать агрегационное расстояние вместо классической метрики расстояния. Мы используем обобщенную медиану Фреше для построения новых нелинейных многоканальных фильтров. Качество подавления шума данными фильтрами сравнивается с основными алгоритмами: медианным и усредняющим.

**Ключевые слова.** нелинейные фильтры, обработка изображений, гиперспектральные изображения.

## **MIMO Frechet filters for hyperspectral images**

Iarmieva E.N.<sup>1\*</sup>, Ivanov P.A.<sup>1</sup>, Shatilov D.V.<sup>1</sup>, Ostheimer E.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Ural Federal University, Mira, 19, Ekaterinburg 620002 RUSSIA*

<sup>2</sup>*Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA  
elina-yarmieva@mail.ru*

**Abstract.** Median filtering has been widely used in scalar-valued image processing as an edge preserving operation. The basic idea is that the pixel value is replaced by the median of the pixels contained in a window around it. In this work this idea is extended onto vector-valued images. It is based on the fact that the median is also the value that minimizes the sum of distances between all grey-level pixels in the window. The Frechet median of a discrete set of vector-valued pixels in a metric space with a metric is the point minimizing the sum of metric distances to the all sample pixels. In this paper, we extend the notion of the Frechet median to the general Frechet median, which minimizes the Frechet cost function (FCF) in the form of aggregation function of metric distances, instead of the ordinary sum. Moreover, we propose use an aggregation distance instead of classical metric distance. We use generalized Frechet median for constructing new nonlinear MIMO-filters. Noise reduction quality of the introduced method is evaluated and compared with some classic algorithms like mean and median filtering.

**Keywords:** MIMO-nonlinear filters, image processing, hyperspectral images.

## Введение

Мы разрабатываем концептуальные структуры и методологии проектирования медианных систем фильтрации с возможностью оценки для многоканальных изображений. Основная идея работы - показать, что обобщенные агрегационные функции Фреше могут быть эффективно использованы для решения проблем связанных с фильтрацией изображений. Целью работы является построение новых нелинейных фильтров, основанных на использовании агрегационных функций Фреше, исследование качества подавления шума и сравнение данных фильтров.

## 1. Методы

Термин многоканальное (или многокомпонентное, многоспектральное, многоцветное, гиперспектральное) изображение используется для изображений с более чем одной компонентой. Они состоят из серий изображений в различных участках оптического диапазона на длинах волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ , называемых спектральными каналами:  $f(x, y) = (f_{\lambda_1}(x, y), f_{\lambda_2}(x, y), \dots, f_{\lambda_K}(x, y))$ , где  $K$  - количество различных оптических каналов. т.е.  $f(x, y): R^2 \rightarrow R^K$ , где  $R^K$  - многоцветное пространство. Следовательно, каждый пиксель в  $f(x, y)$  представляет спектр на определенных длинах волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$  наблюдаемой в точке  $(x, y)$ . Примером такого набора данных является цветное (3-канальное или 3-диапазонное) изображение:  $f_{col}(x, y) = (f_R(x, y), f_G(x, y), \dots, f_B(x, y))$ , где каждый пиксель характеризуется тремя скалярами, представляющими его красную (R), зеленую (G) и синюю (B) компоненты.

Мы рассматриваем зашумленные изображения вида  $f(x) = s(x) + \eta(x)$ , где  $s(x)$  - это оригинальное  $K$ -канальное изображение  $s(x) = (s_1(x), s_2(x), \dots, s_K(x))$  и  $\eta(x)$  определяет  $K$ -канальный шум  $\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_K(x))$ , который

добавляется к изображению для получения поврежденного изображения  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_K(x))$ . Здесь  $x = (i, j) \in Z^2$  - координата расположения пикселя в области изображения.

Оптимальность работы и оценка устранения шума спроектированными фильтрами производится путем сравнения их работы с двумерными стандартными линейным усредняющим и медианным фильтрами. Усредняющий фильтр представляет собой простой линейный фильтр, реализующий метод сглаживания изображения, то есть уменьшения количества вариаций интенсивности между пикселем и следующим, его основная идея - замена значения каждого пикселя в изображении средним значением его соседей, включая сам пиксель. Медианный фильтр - это нелинейный фильтр, который изменяет среднее значение интенсивности изображения, если пространственное распределение шума в изображении не является симметричным в пределах окна, его основная идея заключается в том, что значение пикселя заменяется медианой пикселей, содержащихся в окне вокруг него.

В двумерных стандартных линейных усредняющих и медианных фильтрах с квадратным  $N$  - клеточным окном  $M^{(i,j)}(m, n)$ , расположенным в точке  $(i, j)$  среднее значение и медиана заменяют центральный пиксель:

$$\hat{s}(i, j) = \text{Mean}(w(m, n)|f(m, n)) = \sum \sum w(m, n)f(m, n), m, n \in (1, N) \quad (1)$$

$$\hat{s}(i, j) = \text{Med}(f(m, n)) \quad (2)$$

где  $\hat{s}(i, j)$  - отфильтрованный серый уровень изображения,  $\{f(m, n)\}, (m, n) \in M^{(i,j)}$  - это блок изображения фиксированного размера  $N$  извлекаемого из  $f$  путем перемещения  $N$  - клеточного окна  $M^{(i,j)}$  в точку  $(i, j)$ ,  $\text{Mean}$  и  $\text{Med}$  являются усредняющим и медианным операторами соответственно.

В данной работе основная идея медианной фильтрации расширяется на векторно-значные изображения. Идея расширения основана на том, что медиана - это также значение пикселя, которому соответствует минимальное расстояние  $L$  в  $R$  между всеми пикселями серого уровня в  $N$  - клеточном окне (рис. 1).

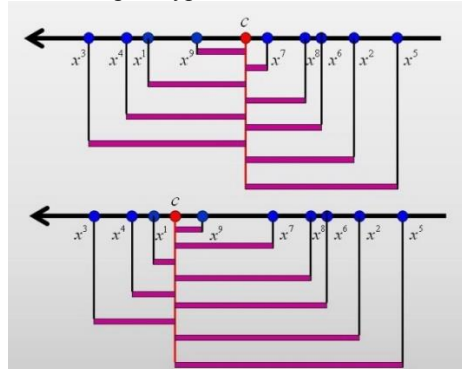


Рис. 1. Расстояния от произвольной точки  $c$  до каждой точки  $x^1, x^2, \dots, x^9 \in R$  из 9-ти клеточного окна.

Точкой Фреше конечного множества векторно-значных пикселей в некотором метрическом пространстве (с заданной метрикой) является такой вектор, сумма расстояний до которого от всех векторных пикселей (находящихся внутри маски) имеет минимальное значение. Оптимальная точка Фреше, связанная с метрикой  $\rho(x, y)$  - это точка  $c_{\text{опт}} \in R$ , при которой стоимостная функция Фреше  $\Sigma \rho(c, x^i)$ ,  $i \in (1, N)$  минимальна (взвешенная сумма расстояний от произвольной точки  $c$  до каждой точки  $x^1, x^2, \dots, x^N$ ) [1-3].

$$c_{\text{опт}} = \text{FrechPt}^{cf}(\Sigma, \rho | x^1, x^2, \dots, x^N) = \arg \min(\Sigma \rho(c, x^i)), c \in R^K, i \in (1, N) \quad (3)$$

Обратите внимание, что  $\arg \min$  это такой аргумент, для которого сумма минимальна. В нашем случае это точка  $c_{\text{опт}}$  из  $R^K$ , сумма всех расстояний от точек  $x^i$  до которой минимальна. Таким образом, оптимальная точка Фреше дискретного набора экспериментальных значений ( $N$  пикселей) в метрическом пространстве  $\langle R^K, \rho \rangle$  это точка минимума суммы расстояний (рис. 2). Это обобщает обычную медиану, которая зависит от минимальной суммы расстояний для одномерных данных. Свойства этой точки были тщательно изучены со времен Ферма (эту точку часто называют точкой Фреше [1] или точкой Ферма-Вебера [4]).

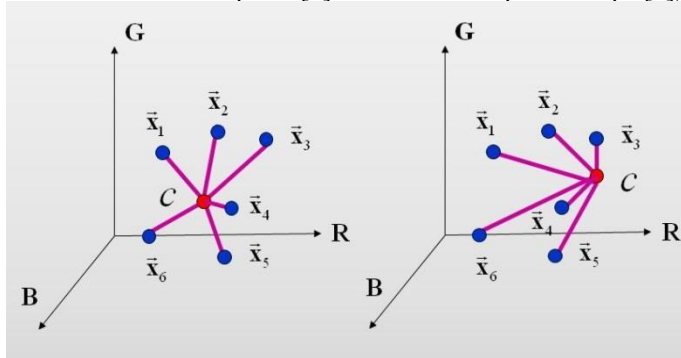


Рис. 2. Расстояния от произвольной точки  $c$  до каждой точки  $x^1, x^2, \dots, x^9 \in R^K$  из  $N$ -клеточного окна в  $K$ -мерном случае.

Расширим понятие точки Фреше до обобщенной точки Фреше, при которой агрегационная стоимостная функция Фреше минимальна. Стоимостная функция Фреше представляется в виде агрегационной функции  $^{cf}\text{Agg}[\rho(c, x^i)]$ ,  $i \in (1, N)$  вместо обычной суммы:

$$c_{\text{опт}} = \text{FrechPt}^{cf}(\Sigma, \rho | x^1, x^2, \dots, x^N) = \arg \min(^{cf}\text{Agg}_{i=1}^N[\rho(c, x^i)]), c \in R^K \quad (4)$$

Более того, мы предлагаем использовать агрегационное расстояние  $^{\rho}\text{Agg}(c, x)$  вместо классического расстояния  $\rho$ , что приводит к новой точке Фреше, связанной с агрегационным расстоянием  $^{\rho}\text{Agg}(c, x)$  и агрегационной стоимостной функцией Фреше  $^{cf}\text{Agg}$ :

$$c_{\text{опт}} = \text{FrechPt}^{cf}(\Sigma, \rho | x^1, x^2, \dots, x^N) = \arg \min(^{cf}\text{Agg}_{i=1}^N[^{\rho}\text{Agg}(c, x)]), c \in R^K \quad (5)$$

Мы используем обобщенную точку Фреше для построения новых нелинейных фильтров, в таком случае фильтры модифицируются следующим образом:

$$\hat{s}(i, j) = \text{FrechPt}(\text{}^{\text{cf}}\text{Agg}, \text{}^{\text{p}}\text{Agg}|f(m, n)), (m, n) \in M^{(i, j)} \quad (6)$$

Фильтр становится агрегационным многоканальным Фреше фильтром, который базируется на произвольной паре агрегационных операторов  $\text{}^{\text{cf}}\text{Agg}$  и  $\text{}^{\text{p}}\text{Agg}$ , которые могут быть изменены независимо друг от друга.

Для расчетов удобнее ограничиться конечной областью поиска  $R^K$  - конечным подмножеством  $D \subset R^K$ .

Мы рассматриваем следующие конечные подмножества:

- $D_{ob} = \{x^1, x^2, \dots, x^N\} \subset R^K$
- Пусть  $Z^{256, K} \subset R^K$ , где  $Z^{256, K} = \{0, 1, \dots, 255\}$ . Например, если  $K = 3$ , тогда  $Z^{256, K}$  это цветной RGB-куб. Если,

$$\begin{aligned} x^1 &= \{x^{(1,1)}, x^{(1,2)}, \dots, x^{(1,K)}\} \in Z^{256, K} \\ x^2 &= \{x^{(2,1)}, x^{(2,2)}, \dots, x^{(2,K)}\} \in Z^{256, K} \end{aligned}$$

$$x^N = \{x^{(N,1)}, x^{(N,2)}, \dots, x^{(N,K)}\} \in Z^{256, K}$$

то определим конечные координаты

$$\begin{aligned} a_1 &= \min\{x^{(1,1)}, x^{(1,2)}, \dots, x^{(1,N)}\}, b_1 = \max\{x^{(1,1)}, x^{(1,2)}, \dots, x^{(1,N)}\} \\ a_2 &= \min\{x^{(2,1)}, x^{(2,2)}, \dots, x^{(2,N)}\}, b_2 = \max\{x^{(2,1)}, x^{(2,2)}, \dots, x^{(2,N)}\} \end{aligned}$$

$$a_K = \min\{x^{(K,1)}, x^{(K,2)}, \dots, x^{(K,N)}\}, b_K = \max\{x^{(K,1)}, x^{(K,2)}, \dots, x^{(K,N)}\}$$

и конструируем второе конечное подмножество  $D_E \subset R^K$  в форме параллелепипеда  $D_E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_K, b_K]$  где  $\times$  – декартово произведение. Очевидно,  $D_{ob} \subset D_E \subset Z_{256}^K \subset R^K$ .

Для расчетов удобнее использовать конечное подмножество  $D = D_E$  или  $D = D_{ob}$  вместо  $R^K$ . В этом случае мы получаем определение D-оптимальной точки Фреше или Фреше медианы. D-оптимальная точка Фреше, связанная с метрикой  $\rho(x, y)$  это точка  $c_D$ , при которой стоимостная функция Фреше принимает минимальное значение в ограниченной области поиска  $D \subset R^K$

$$c_{opt} = D - \text{FrechPt}[\rho|x^1, x^2, \dots, x^N] \quad (7)$$

Если  $D = R^K$ , тогда  $R^K$ -точка Фреше - это классическая точка Фреше (3).

Если  $D = D_{ob} = \{x^1, x^2, \dots, x^N\}$ , тогда  $D_{ob}$ -точка Фреше называется медианой Фреше.

Если  $D = D_E \subset Z^{256, K}$ , тогда  $D_E$  - точка Фреше называется усовершенствованной медианой Фреше.

Для построения новых нелинейных многоканальных фильтров, фильтры модифицируются следующим образом:

$$\hat{s}(i, j) = R^K - \text{FrechPt}[\rho|f(m, n)], (m, n) \in M^{(i, j)} \quad (8)$$

$$\hat{s}(i, j) = D_{ob} - \text{FrechPt}[\rho|f(m, n)], (m, n) \in M^{(i, j)} \quad (9)$$

$$\hat{s}(i, j) = D_E - \text{FrechPt}[\rho|f(m, n)], (m, n) \in M^{(i, j)} \quad (10)$$

Получаем многоканальный Фреше – фильтр, Фреше медиана ММО – фильтр и усовершенствованный Фреше медиана ММО – фильтр, соответственно, связанные с метрикой  $\rho$ .

Если обрабатываемая информация действительные числа, т.е.  $x^1, x^2, \dots, x^N \in R$  и функция расстояния - это сити расстояние  $\rho(x, y) = \rho_1(x, y) = |x - y|$  тогда оптимальные  $D$  - Фреше точки для значений  $x^1, x^2, \dots, x^N \in R$  являются классической точкой Фреше  $D = R$ , классической медианой  $D = D_{ob}$ , и усовершенствованной медианой  $D = D_E$ , соответственно. Они связаны с сити метрикой  $\rho_1(x, y)$  т.е.

$$c_{\text{опт}}^R = R - \text{FrechPt}[\rho_1|x^1, x^2, \dots, x^N] = \arg \min_{c \in R} (\Sigma |c - x^i|) = = \text{FrechMed}(\rho_1|x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (11)$$

$$c_{\text{опт}}^{D_{ob}} = D_{ob} - \text{FrechPt}[\rho_1|x^1, x^2, \dots, x^N] = \arg \min_{c \in D_{ob}} (\Sigma |c - x^i|) = = \text{Med}(\rho_1|x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (12)$$

$$c_{\text{опт}}^{D_E} = D_E - \text{FrechPt}[\rho_1|x^1, x^2, \dots, x^N] = \arg \min_{c \in D_E} (\Sigma |c - x^i|) = = \text{ElabMed}(\rho_1|x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (13)$$

В этом случае фильтры (8)-(10) являются медианным одноканальным Фреше фильтром, классическим медианным одноканальным Фреше фильтром и усовершенствованным медианными одноканальным Фреше фильтром.

Если обрабатываемая информация векторы, т.е.  $x^1, x^2, \dots, x^N \in R^K$  и функция расстояния это  $L_p$  – метрика  $\rho(x, y) = \rho^p(x, y) = ||x - y||^p$ , тогда оптимальные  $D$  -Фреше точки (7) для векторов  $x^1, x^2, \dots, x^N \in R^K$  являются точкой Фреше  $D = R^K$ , векторной медианой  $D = D_{ob} \in R^K$ , и усовершенствованной векторной медианой  $D = D_E \in R^K$ , соответственно. Они связаны с  $L_p$  – метрикой  $\rho^p(x, y)$ , т.е.

$$c_{\text{опт}}^{R^K} = R^K - \text{FrechPt}[\rho^p|x^1, x^2, \dots, x^N] = \arg \min (\Sigma ||c - x^i||^p) = = \text{FrechVecMed}(\rho^p|x^1, x^2, \dots, x^N), c \in R^K \quad (14)$$

$$c_{\text{опт}}^{D_{ob}} = D_{ob} - \text{FrechPt}[\rho^p|x^1, x^2, \dots, x^N] = \arg \min (\Sigma ||c - x^i||^p) = = \text{VecMed}(\rho^p|x^1, x^2, \dots, x^N), c \in D_{ob} \quad (15)$$

$$c_{\text{опт}}^{D_E} = D_E - \text{FrechPt}[\rho^p|x^1, x^2, \dots, x^N] = \arg \min (\Sigma ||c - x^i||^p) = = \text{ElabVecMed}(\rho^p|x^1, x^2, \dots, x^N), c \in D_E \quad (16)$$

В этом случае фильтры (8)-(10) являются  $L_p$  векторным медианным многоканальным Фреше фильтром, классическим векторным многоканальным медианным Фреше фильтром и усовершенствованным векторным многоканальным медианным Фреше фильтром, соответственно [5].

## 2. Результаты

Мы провели ряд экспериментов с вышеописанными многоканальными фильтрами с использованием нескольких изображений. Результаты обработки изображения «Ара» размером 512×512 представлены на рис. 3-5.

Для получения зашумленных изображений с различными пиковыми отношениями сигнала к шуму использовались шум типа «Соль-перец» и равномерно-распределенный шум.

В работе были протестированы векторные Фреше фильтры с Евклидовой метрикой  $\rho_{\text{Agg}} = \rho_2$  и агрегационными операторами  $\text{cfAgg} = \text{Mean}, \text{Med}, \text{ElabMed}$  (используются независимо по каждому каналу),  $\text{cfAgg} = \text{VecMed}, \text{ElabVecMed}$  (используются с учетом всех каналов одновременно). Оценка эффективности работы фильтров производится путем сравнения пиковых отношений сигнала к шуму зашумленного и отфильтрованного изображений. Во всех фильтрах используется окно размером 3×3.

Таблицы 1-3 и графики (Рис. 6) демонстрируют результаты фильтрации при различных интенсивностях и видах шума. Все векторные Фреше фильтры имеют хорошие шумоподавляющие свойства. Легко видеть, что векторные Фреше фильтры VecMed и ElabVecMed лучше в сравнении с классическими Med и ElabMed, особенно при шуме типа цветной соль-перец.

Таким образом, ввиду актуальности проблемы обработки изображений, можно сделать вывод о том, что построенные нами фильтры Фреше могут использоваться наравне с широко-известными алгоритмами медианной и усредняющей фильтрации.

## 3. Заключение

В статье представлен новый класс нелинейных обобщенных многоканальных фильтров (векторные медианные фильтры или Фреше фильтры) для обработки многоканальных изображений. Эти фильтры основаны на произвольных парах агрегационных операторов, которые могут быть изменены независимо друг от друга, при этом для каждой пары параметров мы получаем уникальный класс новых нелинейных фильтров.



а) Оригинальное изображение



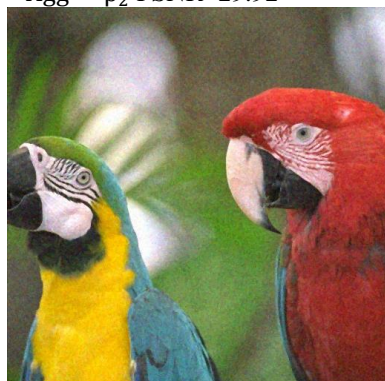
б) Зашумленное изображение  
PSNR=25.08



в)  $^{cf}Agg = \text{Mean(Average)}$ ,  
 $^{\rho}Agg = \rho_2$  PSNR=29.92



г)  $^{cf}Agg = \text{Med, ElabMed}$ ,  
 $^{\rho}Agg = \rho_2$  PSNR=29.26



д)  $^{cf}Agg = \text{VecMed}$ ,  
 $^{\rho}Agg = \rho_2$  PSNR=27.69



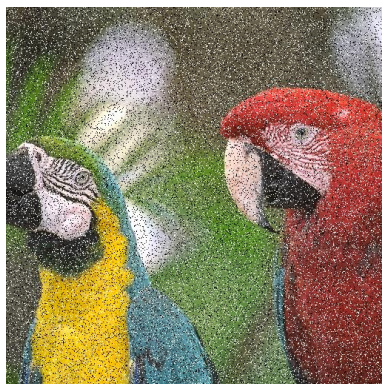
е)  $^{cf}Agg = \text{ElabVecMed}$ ,  
 $^{\rho}Agg = \rho_2$  PSNR=30.48

Рис 3. а) Оригинальное б) зашумленные изображения, шум: равномерно-распределенный, отфильтрованные изображения в)-е).





а) Оригинальное изображение



б) Зашумленное изображение  
PSNR=15.27



в)  $^{cf}Agg = \text{Mean(Average)}$   
 $^pAgg = \rho_2$  PSNR=20.60



г)  $^{cf}Agg = \text{Med, ElabMed}$ ,  
 $^pAgg = \rho_2$  PSNR=29.70



д)  $^{cf}Agg = \text{VecMed}$ ,  
 $^pAgg = \rho_2$  PSNR=29.61

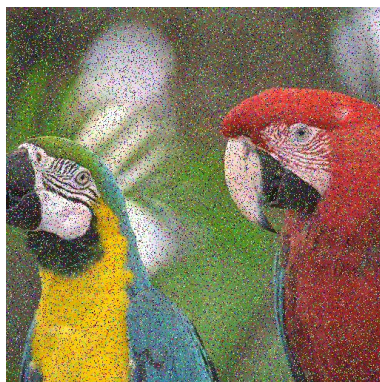


е)  $^{cf}Agg = \text{ElabVecMed}$ ,  
 $^pAgg = \rho_2$  PSNR=29.71

Рис. 4. а) Оригинальное б) зашумленное изображения, шум: черно-белый соль-перец, отфильтрованные изображения в)-е).



а) Оригинальное изображение



б) Зашумленное изображение  
PSNR=15.28



в)  $^{cf}Agg = \text{Mean(Average)}$ ,  
 $^{\rho}Agg = \rho_2$  PSNR=21.25



г)  $^{cf}Agg = \text{Med, ElabMed}$ ,  
 $^{\rho}Agg = \rho_2$  PSNR=29.99



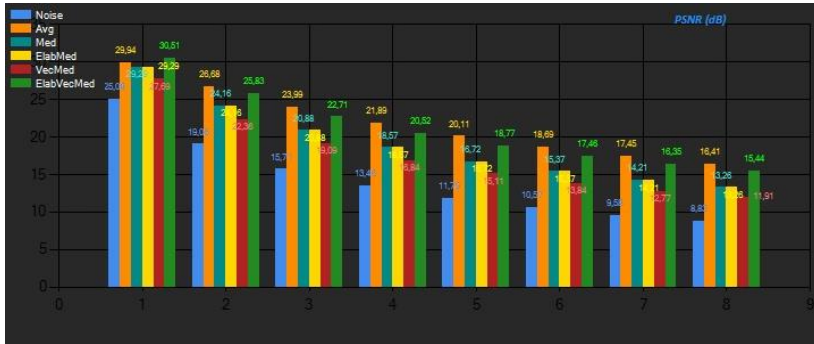
д)  $^{cf}Agg = \text{VecMed}$ ,  
 $^{\rho}Agg = \rho_2$  PSNR=31.86



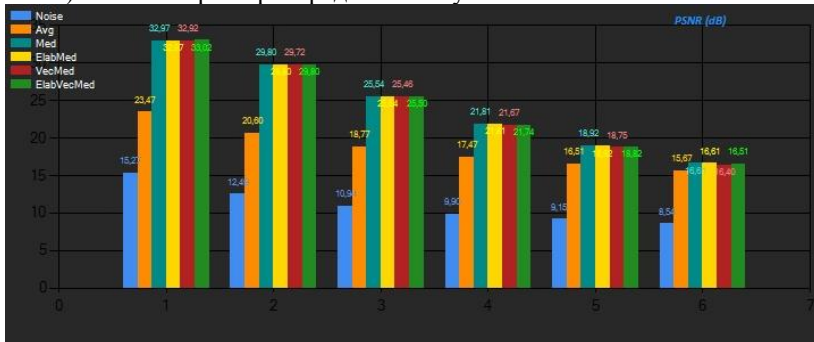
е)  $^{cf}Agg = \text{ElabVecMed}$ ,  
 $^{\rho}Agg = \rho_2$  PSNR=32.07

Рис. 5. а) Оригинальное б) зашумленные изображения, шум: цветной соль-перец, отфильтрованные изображения в)-е).

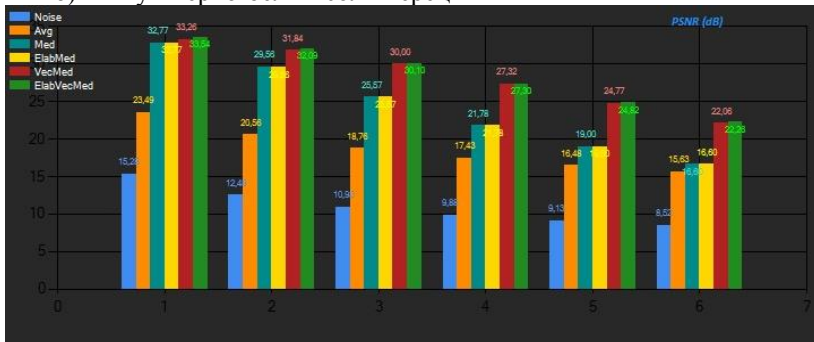
## «Информация: передача, обработка, восприятие»



а) Равномерное распределение шума



б) Шум черно-белый соль-перец



в) Шум цветной соль-перец

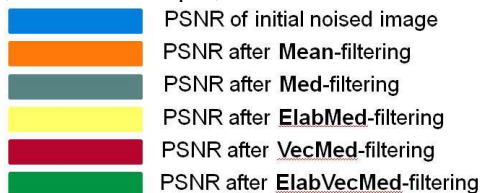


Рис. 6. Графики результатов фильтрации изображений с шумами различных видов и интенсивностей

## Список литературы

1. 1. Fréchet, M., Les elements aleatoires de nature quelconque dans un espace distancie. Ann. Inst. H. Poincare, 10(3), pp. 215–310, 1948.
2. 2. Bajaj, C., Proving geometric algorithms nonsolvability: An application of factoring polynomials. Jornal of Symbolic Computaton, 2, pp. 99–102, 1986
3. 3. Bajaj, C., The algebraic degree of geometric optimization problems. Discrete and Computation Geometry, 3, pp. 177–191, 1988.
4. 4. Chandrasekaran, R. & Tamir, F., Algebraic optimization: The Fermat-Weber problem. Mathematical Programming, 46, pp. 219-224, 1990
5. 5. N. U. Prabhu, Stochastic Storage Processes. Springer, 2nd edition, 1998, pg. 327